

# Plastische Formänderungsenergie duktiler Biegeträger unter stossartiger Belastung

Von Daniel Schuler, Winterthur

Bei duktilen Biegeträgern, die über die Fließgrenze belastet werden, kann die Formänderungsenergie zur Bemessung und Beurteilung verwendet werden. Dieser Ansatz, der sich im speziellen auch bei stossartigen Belastungen eignet, wird mittels einer einfachen Näherung angegeben. Das vorgestellte Verfahren wurde im Rahmen von Schockprüfungen an Schutzraumeinbauten mit gemessenen Werten verglichen und konnte dabei mit genügender Genauigkeit verifiziert werden.

## Einleitung und Übersicht

Die Bemessung biegebeanspruchter Bauteile erfolgt bei statischen Lasten im Normalfall mit Hilfe des Tragmoments des Biegeträgers im linear-elastischen Werkstoffbereich. Bei stoss- oder schockartiger Belastung von Konstruktionen aus duktilen Werkstoffen, wie sie aufgrund von Sicherheitsanforderungen häufig zu berücksichtigen sind, wird es oft notwendig, über die Fließgrenze hinaus zu dimensionieren, um unwirtschaftliche steife Konstruktionen zu vermeiden.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf weiche Stösse. Die kinetische Anfangsenergie wird dabei durch Deformation des stossenden und gestossenen Körpers abgebaut. Harte Stösse,

wie sie beim Aufprall von meist kleinen, sehr steifen Projektilen mit grosser Geschwindigkeit entstehen, beanspruchen das getroffene Bauteil sehr lokal (Materialverdrängung, -durchdringung) und können analytisch nicht exakt erfasst werden.

Die bei Schockbelastungen an Einbauteilen angreifenden Trägheitskräfte führen zu weichen Stossbelastungen, die einerseits von der Verankerung der Tragkonstruktion aufgenommen werden müssen und andererseits durch elastische und plastische Verformung abgebaut werden. Werden stoss- oder schocksichere Konstruktionen im linear-elastischen Werkstoffbereich beansprucht, so sind die Verankerungskräfte für das Versagen massgebend und auch dementsprechend nachzuweisen. Sie werden durch das dynamische Verhal-

ten der Konstruktion (Eigenschwingzeit), sowie durch den zeitlichen Verlauf des Belastungsstosses bestimmt [1]. Können jedoch bei der Einwirkung stossartiger Lasten auf verhältnismässig wenig biegesteife duktile Träger auch plastische Bauteildeformationen zugelassen werden, sind nicht mehr nur die Verankerungskräfte, sondern auch die plastischen Deformationen selbst als Bemessungskriterien heranzuziehen (Tabelle 1).

Bei Tragkonstruktionen, die auf die Einwirkungen von weichen Stössen zu dimensionieren sind, ist es deshalb sinnvoll, der Festigkeitsbeurteilung die bis zum Versagen mögliche Energieaufnahme des Bauteils zugrunde zu legen [2]. Von Vorteil bei der Verwendung der Energiemethode ist zudem, dass der oft unbekannt oder nur schwierig zu erfassende Stoss-Zeitverlauf für die analytische Erfassung nicht unbedingt bekannt sein muss.

Im folgenden ist eine von Struck [3] beschriebene Näherungsrechnung wiedergegeben, welche die Bestimmung der Energieaufnahme von duktilen Biegeträgern unter Einzellast ermöglicht. Die ausführliche Herleitung des Berechnungsganges ist in [3] und den in der gleichen Publikation aufgeführten Quellen zu finden. Beim angegebenen Rechenmodell wird die Energieaufnahme bei der Einwirkung weicher Stösse einer statischen Beanspru-

Tabelle 1. Übersicht der Bemessungskriterien bei duktilen Biegeträgern

Materialbeanspruchung	elastisch $\sigma \leq \sigma_F$	plastisch $\sigma > \sigma_F$
Versagensbild	$R \cdot l > M_V$ 	$R \cdot l \leq M_V$ 
Versagenskriterien	Verankerungskräfte	plastische Formänderungsenergie (zul. Dehnung $\epsilon_V$ ) (zul. Durchbiegung $f_V$ )
mathematische Erfassung	dynamisch (Verankerungskräfte)	Energieaufnahme bis Versagen
massgebende Grössen	Stosszeit und Stossform Eigenschwingverhalten des Trägers	Materialkennwerte Dehngeschwindigkeit Trägerquerschnitt

Tabelle 2. Näherung für die Fließkurven einiger kreis- und rechteckförmiger Querschnitte nach [3]

Querschnitts-		$m_{VPL} = W_{VPL}/W$
form	parameter	
	beliebig	$\frac{16}{3\pi} = 1,70$
	$\frac{r_a}{r_i} = 2$	$\frac{16}{3\pi} \cdot \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^3}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^4} = 1,58$
	dünnwandig	$\frac{4}{\pi} = 1,27$
	beliebig	1,5
	dünnwandig	$1,5 \frac{2 + \frac{h}{b}}{3 + \frac{h}{b}}$

chung bis zur selben maximalen Dehnung gleichgesetzt. Das Materialverhalten wird durch eine bilineare Spannungs-Dehnungsbeziehung angenähert.

## Materialverhalten

Das Verformungsverhalten duktiler Baustähle bei Biegebeanspruchung kann näherungsweise mit einer bilinearen Spannungs-Dehnungsbeziehung beschrieben werden. Das Verhältnis zwischen Elastizitätsmodul  $E$  und Verfestigungsmodul  $T$ , welches das Materialverhalten bei plastischer Verformung kennzeichnet, ist bei den betrachteten Stählen Fe 360 (St 24/37) und Fe 510 (St 36/52) annähernd gleich und den folgenden Berechnungen mit  $E/T = 207$  zugrunde gelegt (Bild 1).

Bei erhöhter Dehnungsgeschwindigkeit erfahren die Festigkeitskennwerte (Streckgrenze, Zugfestigkeit) duktiler Stähle eine meist nennenswerte Zunahme, die bei der Bemessung auf stossartige Lasten berücksichtigt werden kann [1]. Im Bild 2 ist eine aus [4] entnommene Zusammenstellung verschiedener Quellen aufgeführt, in welcher die Zunahme der Streckgrenze in Funktion der Dehnungsgeschwindigkeit für Stähle unterschiedlicher Festigkeit aufgetragen ist. Charakteristisch ist dabei, dass bei hochfesten Stählen nur eine geringe Erhöhung der Streckgrenze resultiert, während weniger feste Stähle eine bedeutend stärkere Zunahme erfahren.

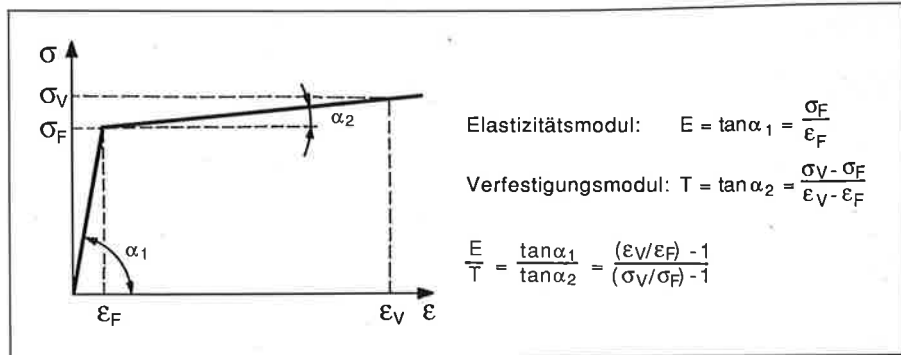
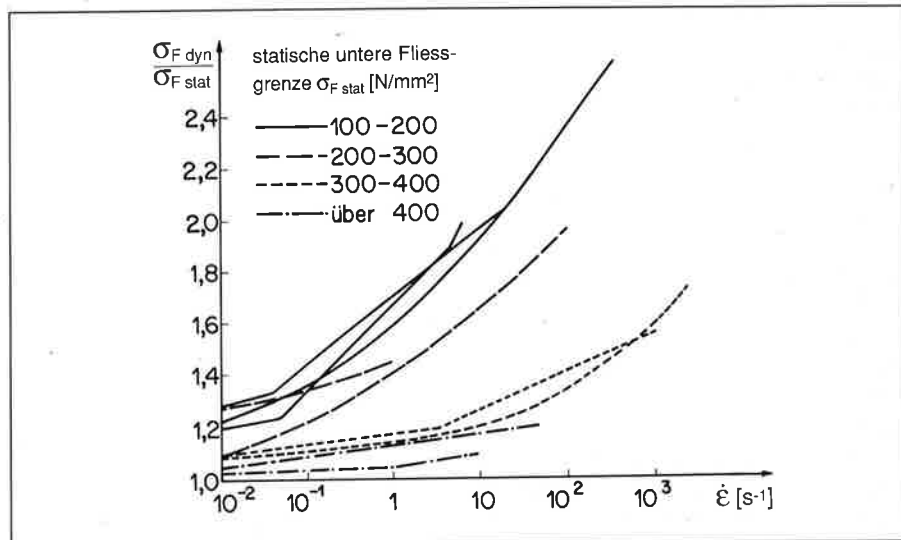


Bild 1. Näherungsweise Beschreibung des Materialverhaltens durch eine bilineare  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung nach [3]

Bild 2. Variation der unteren Fließgrenze für einachsigen Zug oder Druck in Abhängigkeit der Dehnungsgeschwindigkeit aus verschiedenen Quellen nach [4]



begrenzte, dort aber stark zunehmende plastische Verformung zurückzuführen.

## Energieaufnahme

Die Energie  $E_V$ , die der Biegeträger bis zum Versagen, das heisst bis zum Erreichen der Versagensdehnung  $\epsilon_v$ , aufnehmen kann, folgt aus einem dem bilinearen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Verlauf (Bild 1) analogen bilinearen Kraft-Durchbiegungsverlauf als Fläche unter der Verformungskennlinie nach Gleichung (1).

$$(1) \quad E_V = \int_{f=0}^{f(\epsilon_v)} R df \approx \approx 1/2 [R_F \cdot f_F + (R_F + R_V) (f_V - f_F)]$$

Die gesamte Energieaufnahme  $E_V$  bezogen auf die Energieaufnahme  $E_F$  bis Fließbeginn und den Verhältniswert  $m_{VPL}$  ist im Bild 4 in Abhängigkeit des Dehnungsverhältnisses aufgezeichnet. Der in Bild 4 aufgezeichnete Verlauf stellt dabei einen unteren Grenzwert für die Energieaufnahme  $E_V$  bis zum Erreichen der maximalen Randdehnung  $\epsilon_V$  dar. Der Faktor  $m_{VPL}$  ist definiert als Verhältnis des Widerstands-

moments  $W_{VPL}$  bei voll plastifiziertem Querschnitt zum normalen, bei linear-elastischer Berechnung gültigen Widerstandsmoment  $W$ . Für kreis- und rechteckförmige Querschnittsformen ist  $m_{VPL}$  in der Tabelle 2 angegeben.

## Praktische Anwendung

Im folgenden Fall aus der Praxis wird für die in Schutzbauten massgebende Schockbelastung die Nutzlast eines Montagesystems für Kabelkanäle bestimmt. Die Gewährleistung der Schocksicherheit ist aber beispielsweise auch überall dort notwendig, wo Installationen unter Erdbebeneinwirkungen versagen können und dadurch zu einem grossen Risiko werden [1]. Die betrachteten langen und schlanken Träger absorbieren bei Schockbelastung grosse Energieanteile durch plastische Deformation. Die Verankerungskräfte der mittels Metallspreizdübel befestigten Deckenträger können dabei nicht über das bei der plastischen Verformung des Trägers übertragenen Moment anwachsen. Bei hoher Belastung genügt deshalb der alleinige Nachweis der Dübelbelastung nicht. Erst mit Hil-

## Durchbiegung

Im plastischen Verformungsbereich ist der Krümmungsverlauf über die Trägerlänge und damit auch die Durchbiegung des Biegeträgers abhängig von seiner Querschnittsform. Im Bild 3 ist die Durchbiegung  $f$  bezogen auf die elastisch gerechnete Durchbiegung  $f_F$  bei Fließbeginn in Funktion des Dehnungsverhältnisses  $\epsilon_{max}/\epsilon_F$  angegeben. Dabei ist mit  $\epsilon_{max}$  die maximale am Querschnittsrand auftretende Dehnung und mit  $\epsilon_F$  die Dehnung bei Fließbeginn bezeichnet. Der angegebene Durchbiegungs-Dehnungsverlauf stellt eine Näherung dar, welche unabhängig von der Querschnittsform angewendet werden kann und welche im Rahmen der sonstigen gemachten Vereinfachungen vertretbar ist. Aus dem Kurvenverlauf ist gut zu erkennen, dass unmittelbar nach Fließbeginn ( $f/f_F > 1$ ) die Durchbiegung zuerst nur wenig, die maximale Randdehnung aber stark ansteigt. Dies ist auf eine anfänglich lokal

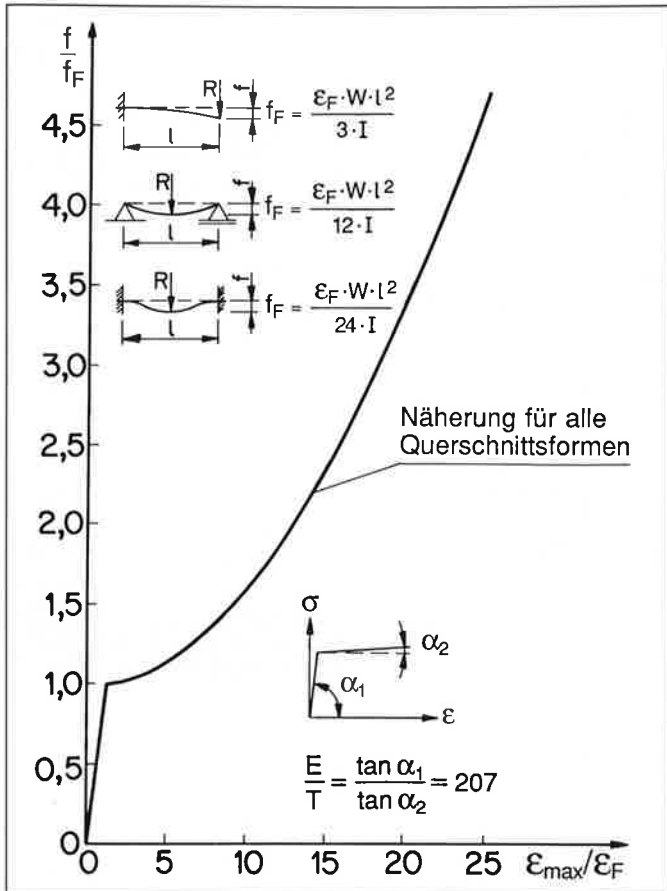
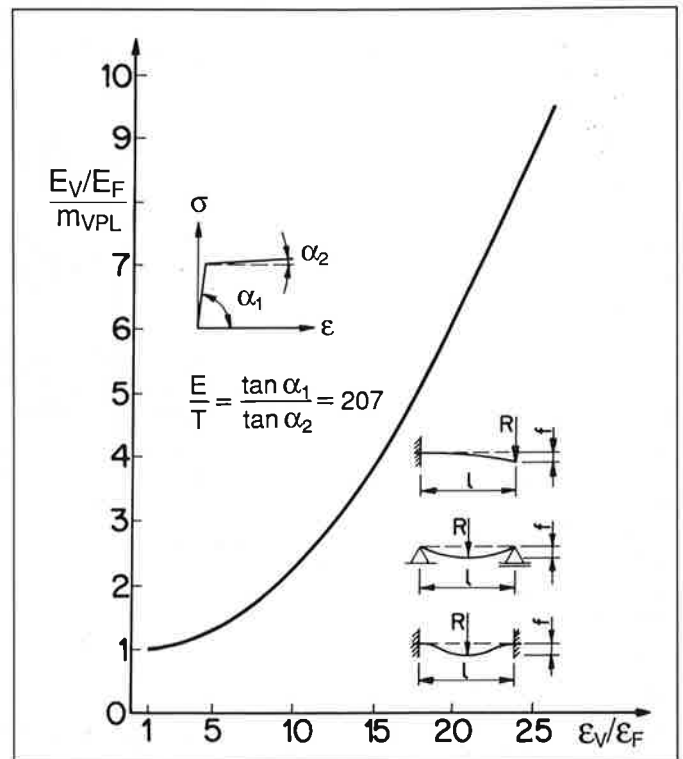


Bild 3 (links). Durchbiegungs-Dehnungsdiagramm von Trägern aus Material mit bilineare Spannungs-Dehnungsbeziehung bei Belastung durch eine Einzelkraft nach [3]

Bild 4. Unterer Grenzwert für die Energieaufnahme  $E_V$  bis zum Erreichen der maximalen Randdehnung  $\epsilon_V$  für mit Einzelast belastete Biegeträger nach [3]



fe der maximal zulässigen Verformung, welche als weiteres Versagenskriterium definiert wird, lässt sich die zulässige Energieaufnahme und damit auch die maximale Traglast abschätzen.

Wird bei einer Stossdauer von 20 ms eine maximale Randdehnung von  $\epsilon_{max} = 5\%$  angenommen, folgt eine mittlere Dehngeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} = 2,5 \text{ s}^{-1}$ . Die Fließgrenze für Fe 360 von  $\sigma_{F stat} = 240 \text{ N/mm}^2$  bei statischer Belastung kann gemäss Bild 2 somit mit dem etwa 1,4 mal höheren Wert auf  $\sigma_{F dyn} = 340 \text{ N/mm}^2$  angesetzt werden. Für den in der ungünstigeren Richtung belasteten dünnwandigen Rechteckquerschnitt  $50 \times 30$  mit einem Trägheitsmoment von  $I = 3,7 \text{ cm}^4$  und einem Widerstandsmoment von  $W = 2,8 \text{ cm}^3$  ergibt sich bei einer Trägerlänge von  $l = 50 \text{ cm}$ :

Moment bei Fließbeginn:

$$(2) \quad M_F = \sigma_{F dyn} \cdot W = 952 \text{ Nm}$$

Durchbiegung bei Fließbeginn:

$$(3) \quad f_F = \frac{M_F \cdot l^2}{3 \cdot E \cdot I} = 10,2 \text{ mm}$$

Energieaufnahme bei Fließbeginn:

$$(4) \quad E_F = \frac{(\sigma_{F dyn} \cdot W)^2 \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} = 9,7 \text{ Nm}$$

Verhältnis  $m_{VPL}$  (gem. Tab. 1):

$$(5) \quad m_{VPL} = 1,5 \cdot \frac{2 + h/b}{3 + h/b} = 1,08$$

Wird der Versagenszustand für eine maximale Durchbiegung von  $f_V = 40 \text{ mm}$  definiert, ergibt sich  $f_V/f_F = 3,9$  und das Dehnungsverhältnis bestimmt gemäss Bild 3 sich zu  $\epsilon_V/\epsilon_F = 22$ . Mit Hilfe der in Bild 4 angegebenen Funktion wird dann  $(E_V/E_F)/m_{VPL} = 7,1$  und damit der untere Grenzwert für die Energieaufnahme bis zum Versagen nach Gleichung (6).

$$(6) \quad E_V = 7,1 \cdot m_{VPL} \cdot E_F = 75 \text{ Nm}$$

Mit dem der vorausgesetzten Schockbelastung und den experimentellen Schockprüfungen zugrunde gelegten Parameter für die maximale Geschwindigkeit  $v = 1,6 \text{ m/s}$  bestimmt sich die kinetische Energie  $E_{Kin}$  einer vom betrachteten Träger aufgenommenen Traglast  $m_{max}$  nach den Gleichungen (7) und (8).

$$(7) \quad E_{Kin} = E_V = 1/2 \cdot m_{max} \cdot v^2$$

$$(8) \quad m_{max} = 2 \cdot E_V / v^2 \approx 60 \text{ kg}$$

### Vergleich mit Resultat der Schockprüfung

Das im Beispiel beschriebene Kabelträgersystem wurde für den Einsatz in

Schutzbauten experimentellen Schockprüfungen unterzogen. Bei der Gruppe für Rüstungsdienste wurde der Prüfling auf der Schockprüfplattform im AC-Laboratorium Spiez Schockbelastungen mit den festgelegten Schockparametern - maximale Beschleunigung  $a = 160 \text{ m/s}^2$  und maximale Geschwindigkeit  $v = 1,6 \text{ m/s}$  - ausgesetzt (Bild 5).

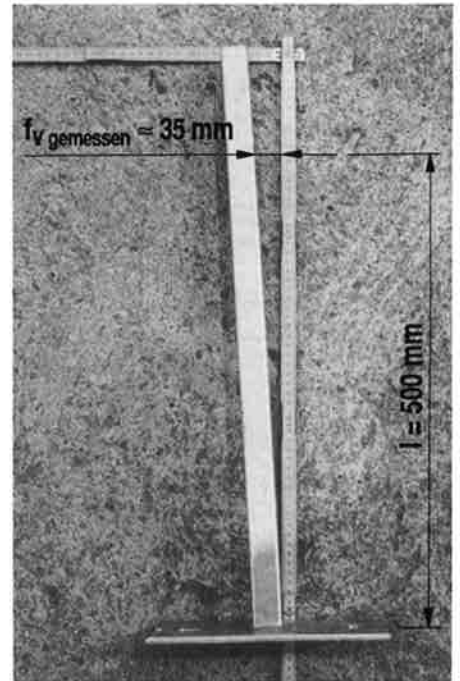
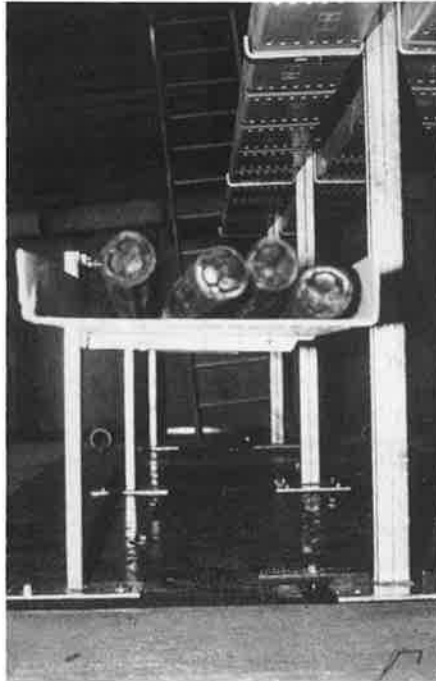
Bei der betrachteten Kabelkanalgrösse wurde angestrebt, eine maximale Nutzlast von  $40 \text{ kg/m}$  zu erreichen. Dies entspricht beim festgelegten Trägerabstand von  $1,5 \text{ m}$  der berechneten Masse von  $m_{max} = 60 \text{ kg}$  pro Träger. Bei einer erhöhten Belastung mit etwa  $80 \text{ kg}$  pro Träger resultierte bei Schockbelastung eine plastische Deformation von  $f_{V gemessen} = 35 \text{ mm}$  (Bild 6). Die Übereinstimmung mit der rechnerischen Abschätzung ( $f_{V gerechnet} = 40 \text{ mm}$ ) darf in Anbetracht der gemachten Vereinfachungen und der getroffenen konservativen Annahme, bei welcher die abgeschätzte Energieaufnahme einen unteren Grenzwert darstellt, als gut bezeichnet werden. Im übrigen weisen die als Last verwendeten schweren Elektrokabel - obwohl verhältnismässig steif - doch eine gewisse Verformbarkeit auf. Sie sind zudem nicht starr mit den Trägern verbunden, so dass wesentliche Energieanteile sowohl von den Kabeln als auch von den Kabelkanälen selbst aufgenommen werden.

## Zusammenfassung und Diskussion

Bei Stahlkonstruktionen, welche auf die möglichen Einwirkungen von weit über der normalen Gebrauchslast liegenden Belastungen zu dimensionieren sind, ist es oft sinnvoll oder sogar notwendig, plastische Bauteildeformationen zuzulassen, und das duktile Verhalten des Konstruktionswerkstoffs zur Energieabsorption auszunutzen. Speziell im Bereich der Sicherheitstechnik sind Anwendungen häufig, bei denen Tragkonstruktionen auf stossartige Lasten zu bemessen sind.

Neben der im Beispiel besprochenen Gewährleistung der Schocksicherheit für Installationen in Schutzbauten sind Anwendungen in der Verkehrstechnik zu nennen, bei denen Konstruktionen an Fahrbahnrandern auf den Aufprall von Fahrzeugen zu dimensionieren sind. Hervorzuheben sind aber auch vor allem auch diejenigen Bereiche, bei denen das Versagen von Einbauten oder Installationen infolge der stossartigen Belastungen bei Erdbebeneinwirkung, zu einer massgebenden Gefährdung der Umwelt führt.

Vom Autor [3] der vorgestellten Bemessungshilfen beschriebene Versuche zeigen, dass die getroffene Festlegung von  $E/T = 207$  dann gerechtfertigt ist, wenn Biegeträger aus homogenem, eigenspannungsfreiem Stahl vorliegen und keine zu grossen Durchbiegungen abgeschätzt werden. In diesem Fall bie-



Bilder 5 und 6. Kabelkanalträger bei der experimentellen Schockprüfung und plastische Deformation nach der Schockbelastung

ten diese Bemessungshilfen dem Ingenieur ein probates Mittel, um ansonsten nur aufwendig zu lösende nicht lineare Festigkeitsprobleme schnell und mit genügender Genauigkeit abzuschätzen.

Adresse des Verfassers: Daniel Schuler, Masch.-Ing. HTL, Bürkel Baumann Schuler, Ingenieure+Planer AG, Neuwiesenstrasse 2, 8400 Winterthur.

### Literatur

- [1] Schuler, D. Dynamische Beanspruchung von Befestigungen bei Stossbelastung. Schweizer Ingenieur und Architekt 104 (1986), H. 17, S. 401.
- [2] Harris, C.M.; Crede, C.E. Shock and Vibration Handbook. McGraw-Hill Book Company, New York, 1976.
- [3] Struck, W. Energieaufnahme von Trägern aus duktilem Material unter Einzellast. Bautechnik 3/87, Wilhelm Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 1987.
- [4] Ammann, W. Stahlbeton- und Spannbetontragwerke unter stossartiger Belastung. Birkhäuser Verlag Basel, 1983.